ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

04/06/2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 76

Α2. Σχολικό σελ. 155

Α3. Σχολικό σελ. 216

Α4. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. · $D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ και

$h(x) \neq 0$, άρα $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$

Λύνω την εξίσωση : $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα $x \neq 1$, οπότε : $D_f = (1, +\infty)$

$f(x) = (\frac{g}{h})(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$

Άρα $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $D_f = (1,+\infty)$

· $D_r = D_{g \cdot h} = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$

$r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x)h(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) = x - \frac{1}{x}$

Άρα $r(x) = x - \frac{1}{x}$, $D_r = [1, +\infty)$

B2. $f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ $, x > 1$

$f'(x) < 0$ *για κάθε* $x \in (1, +\infty)$ *επομένως* $f \downarrow (1, +\infty)$ *άρα* $1-1$, *άρα αντιστρέφεται.*

$Df^{-1} = f(Df) = f((1, +\infty) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to1^+} f(x)\right) = (1, +\infty)$

αφού:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ *και*

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} [(x+1)\cdot\frac{1}{x-1}] = 2\cdot(+\infty) = +\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0$ *και* $x-1 > 0$ *κοντά στο* 1^+,

άρα $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$f(x) = y \Leftrightarrow$

$\frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow$

$x+1 = y(x-1) \Leftrightarrow$

$x+1 = yx - y \Leftrightarrow$

$x - yx = -1 - y \Leftrightarrow$

$x(1-y) = -1 - y \Leftrightarrow$

$x = \frac{-1-y}{1-y} \Leftrightarrow$

$x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow$

Επομένως, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $\quad Df^{-1} = (1, +\infty)$

Αφού $Df = Df^{-1} = (1, +\infty)$ *και* $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$

για καθε $x > 1$, *ισχύει ότι* $f^{-1} = f$.

B3. Η r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες διότι είναι συνεχής στο

[1, +∞)

Πλάγια – οριζόντια ασύμπτωτη :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$, άρα λ = 1

$\lim\limits_{x\to+\infty}(r(x) - \lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - \frac{1}{x} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$, άρα β = 0.

Επομένως η y= x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +∞

Β4.

Πρέπει $(f^{-1}(f(x))^2 = 1 + r(x)$

$πρέπει$:

$f(x) \in Df^{-1}\ άρα\ x > 1$

$x \in D_f\ , άρα\ x > 1\ και\ x \in D_r\ άρα\ x \in (1, +\infty)$

$Τελικά, x > 1$

$x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$

$x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow$

$x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 4)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 4\ (δεκτή)\ ή\ x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1\ (απορρίπτονται)$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1.

$f\ συνεχής\ στο\ [0, +\infty)\ άρα\ f\ συνεχής\ στο\ x = 2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$

$\lim\limits_{x\to 2+}(-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-2x + 4 + e^\lambda\right) = -4 + 8 - 3 + \lambda$

$\Leftrightarrow -4 + 8 - 3 + \lambda = -4 + 4 + e^\lambda \Leftrightarrow e^\lambda = \lambda + 1\ (*)$

$Από\ βασική\ ανισότητα\ ισχύει\ lnx \leq x - 1\ \ (1)\ για\ κάθε\ x > 0$

$και\ η\ ισότητα\ ισχύει\ μόνο\ για\ x = 1.$

$Θέτουμε\ στην\ (1)\ όπου\ x\ το\ e^x > 0\ άρα\ lne^x \leq e^x - 1$

$x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$ *και η ισότητα ισχύει μόνο για* $e^x = 1 \Leftrightarrow$ $x = 0$ *άρα η* $(*)$ *ισχύει μόνο για* $\lambda = 0$.

Γ2. Για λ = 0

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4+e^0 & , 0\leq x<2\\ -x^2+4x-3 & , x>2\end{cases} \Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}-2x+5 & , 0\leq x<2\\ -x^2+4x-3 & , x>2\end{cases}$$

Για $0 \leq x < 2$ η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = -2 < 0$ για κάθε $x \in [0 , 2)$

Για $x > 2$ η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = -2x + 4$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left[-(x-2)\right]=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

Άρα $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ επομένως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = 2 .

Άρα

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & , 0\leq x<2\\ -2x+4 & , x>2\end{cases}$$

Για $0\leq x < 2$ $f'(x) = -2 < 0$

Για $x> 2$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ απορρίπτεται

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 4> 0 \Leftrightarrow x < 2$ απορρίπτεται

x	-∞	0	2	+∞
$f'(x)$		-	0	-
f		↘		↘

Η f ↓ στο [0,2] , ↓ [2 ,+∞) και επειδή f συνεχής στο [0,+∞) η f ↓ στο [0,+∞)

Η f παρουσιάζει στο x =0 ολικό μέγιστο το f(0) = 5 .

Γ3. i) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2∈(0,3) άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο (0,3) , επομένως η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

ii) Δ(0, f(0)) δηλαδή Δ(0,5)

$E(3, f(3))$ δηλαδή $E(3,0)$

Ο συντελεστής διεύθυνσης του ΕΔ είναι

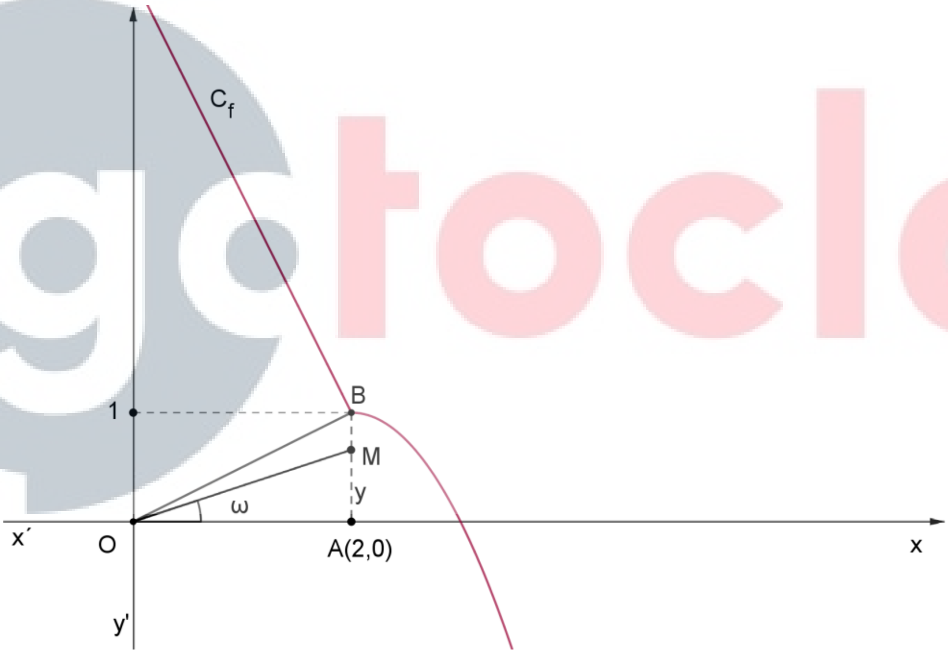
$$\lambda_{\Delta E} = \frac{y_E - y_\Delta}{x_E - x_\Delta} = \frac{0-5}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

• Για $0 \le x < 2$ $\quad f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3}$ αδύνατο

• Για $x > 2$ $\quad f'(x) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2x+4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}$ δεκτό

Άρα υπάρχει $\xi = \frac{17}{6} \in (0,3)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ΔΕ.

Γ4. Για κάθε $t \ge 0$ είναι $\omega = \omega(t)$, $y = y(t)$ με $y'(t) = u = 0,5$



$$\text{εφ}(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2} \Leftrightarrow \left(\text{εφ}(\omega(t))\right)' = \left(\frac{y(t)}{2}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\text{συν}^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \cdot \text{συν}^2\omega(t) \Leftrightarrow \omega'(t) = \frac{0,5}{2} \cdot \text{συν}^2\omega(t) \quad (1)$$

Για $t = t_o$ το κινητό βρίσκεται στο σημείο Β. Από Πυθαγόρειο Θεώρημα

$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Leftrightarrow OB^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow OB^2 = 5 \Leftrightarrow OB = \sqrt{5}$

άρα $\sigma\upsilon\nu\omega(t_o) = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Η (1) για $t = t_o$ γίνεται

$$\omega'(t_o) = \frac{0,5}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5} \text{ rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \frac{lnx + ax}{x}$ $\mu\varepsilon\ D_f = (0, +\infty)$

$H\ f$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα και πηλίκο συνεχών με

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right)x - lnx - ax}{x^2} = \frac{1 + ax - lnx - ax}{x^2} =$$

$$\frac{1 - lnx}{x^2}, \qquad x \in (0, +\infty)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - lnx}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - lnx = 0 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \overset{x^2>0}{\Longleftrightarrow} 1 - lnx > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

x	-∞	0		e		+∞
f΄(x)			+	0	-	
f			↗		↘	

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x=e το f(e)=$\frac{lne + ae}{e} = \frac{1 + ae}{e}$

Όμως $f((0, +\infty) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$ άρα $f_{max} = 1 + \frac{1}{e}$

οπότε, $\frac{1 + ae}{e} = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = 1$

Δ2. Η f για a=1 γίνεται f(x) = $\frac{lnx + x}{x} = \frac{lnx}{x} + 1, x > 0$

έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{lnx}{x} + 1\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(lnx \cdot \frac{1}{x} + 1) = -\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

άρα $f\big((0, e)\big] = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$ αφού $f \uparrow$ στο $(0, e]$ και συνεχής

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{x}+1\right) = 1$$

$$\alpha\varphi o\acute{\upsilon}:\ \lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ f\big((e,+\infty)\big) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to e} f(x)) \ = \left(1{,}1+\frac{1}{e}\right)$$

$\Pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota\ 0 \in f\big((0,e]\big)\ \ f\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ (0,e]$

$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{o}\ x_o \in (0,e]\ \tau\acute{\varepsilon}\tau o\iota o\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ f(x_0) = 0$

$T o\ 0 \notin \sigma\tau o\ f\big((e,+\infty)\big)\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ f(x) = 0\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta$

$\sigma\tau o\ (e,+\infty)$

$T\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}, \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta\ f(x) = 0$

$\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha\ \pi o\upsilon\ \beta\rho\acute{\iota}\sigma\kappa\varepsilon\tau\alpha\iota\ \sigma\tau o\ (0,e]$

$$E\pi\acute{\iota}\sigma\eta\varsigma, f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma\ \sigma\tau o\ \left[\frac{1}{2},1\right] \kappa\alpha\iota\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = -2ln2 + 1 < 0$$

$$\kappa\alpha\iota\ f(1) = \frac{ln1}{1} + 1 = 1 > 0$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ f\left(\frac{1}{2}\right) f(1) < 0\ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha\pi\acute{o}\ \theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ Bolzano\ \eta\ \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$$

$$f(x) = 0$$

$$\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ \tau o\upsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\nu\ \mu\acute{\iota}\alpha\ \rho\iota\zeta\alpha\ \sigma\tau o\ \left(\frac{1}{2},e\right] \subseteq (0,e]\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ f(x) = 0\ \acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota$$

$$\mu o\nu\alpha\delta\iota\kappa\acute{\eta}\ \rho\acute{\iota}\zeta\alpha\ x_0\ \eta\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \alpha\nu\acute{\eta}\kappa\varepsilon\iota\ \sigma\tau o\ \left(\frac{1}{2},1\right)$$

Δ3. i) $f(4) = \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{2\ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 = f(2)$

· Για $x \in (0, e]$ η $f\uparrow$ άρα η εξίσωση $f(x) = f(2)$ έχει ακριβώς 1 ρίζα την $x = 2$ αφού το $2 \in (0, e]$

· Για $x \in (e, +\infty)$ η $f\downarrow$ άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς 1 ρίζα την $x = 4$ αφού το $4 \in (e, +\infty)$.

Τελικά η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ακριβώς 2 λύσεις τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

ii) Για $x \in (0, +\infty)$ έχουμε :

$2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \overset{2x>0}{\Longleftarrow} \frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \overset{+1}{\Leftrightarrow} \frac{\ln 2}{2} + 1 \le \frac{\ln x}{x} + 1$

$\Leftrightarrow f(2) \le f(x)$ (1)

· Για $x \in (0, e]$ η $f \uparrow$ οπότε :

(1) $\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x \ge 2$, άρα $e \ge x \ge 2$

· Για $x \in (e, +\infty)$ η $f \downarrow$ οπότε :

(1) $\Leftrightarrow f(x) \ge f(4) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x \le 4$, άρα $e < x \le 4$

Συνοψίζοντας : $x \in [2,4]$

Δ4. Έχουμε $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$, η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

α' τρόπος :

Για $x \in [-\ln 2, 0]$ έχουμε :

$-\ln 2 \le x \le 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{2} \le x \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le e^x \le 1$

Ακόμη το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το :

$E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|dx = \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} \left|f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}\right| dx$

Θέτω $e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u$, άρα :

$dx = \frac{1}{u} du$

$u_1 = e^{\ln\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$u_2 = e^0 = 1$

Άρα :

$E = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u}\right| \cdot \frac{1}{u} du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2}\right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(u) \cdot f'(u)| du$

Για $u \in [\frac{1}{2}, 1]$ έχουμε ότι $f'(u) > 0$

Για $u \in [\frac{1}{2}, 1]$ λύνουμε : $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \overset{f\uparrow[\frac{1}{2},1]}{\Longleftrightarrow} 1 \ge x > x_0$

Άρα : $E = -\int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u)f'(u)du + \int_{x_0}^{1} f(u)f'(u)du =$

$-[\frac{f^2(u)}{2}]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + [\frac{f^2(u)}{2}]_{x_0}^{1} =$

$-\frac{f^2(x_0)}{2}+\frac{f^2(\frac{1}{2})}{2}+\frac{f^2(1)}{2}-\frac{f^2(x_0)}{2}=0+\frac{f^2(\frac{1}{2})}{2}+\frac{f^2(1)}{2}-0=\frac{(1-\ln 4)^2}{2}+\frac{1}{2}=$

$\frac{1-2\ln 4+\ln^2 4+1}{2}=\frac{2-2\ln 4+\ln^2 4}{2}$ τμ

β΄ τρόπος:

$g(x)=F(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}=\frac{x+e^x}{e^x}\cdot\frac{1-x}{e^x} \quad x\in\mathbb{R} \quad , \quad \frac{1-x}{e^x}>0$ για $x<1$

Η g συνεχής

$$E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|\frac{x+e^x}{e^x}\right|\cdot\left|\frac{1-x}{e^x}\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|\frac{x+e^x}{e^x}\right|\cdot\frac{1-x}{e^x}dx \overset{\text{θέτω } \frac{x+e^x}{e^x}=y\ ,\ dy=\frac{1-x}{e^x}dx}{=}$$

$$=\int_{1-2\ln 2}^{0}|y|dy \overset{1-2\ln 2<0}{=} \int_{1-2\ln 2}^{0}(-y)dy+\int_{0}^{1}ydy=\left[-\frac{y^2}{2}\right]_{1-2\ln 2}^{0}+\left[\frac{y^2}{2}\right]_{0}^{1}=\frac{(1-2\ln 2)^2}{2}+\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$